O funkcjach półciągłych.

matematyka

Stefan J. Kempisty

Wstęp.

Ciągłość funkcji była przez dłuższy czas utożsamiana z ciągłością linji krzywej a to skutkiem panującego wówczas zwyczaju wnioskowania o własnościach funkcji na zasadzie jej wykresu.

Ponieważ krzywa ciągła łącząca dwa punkty na płaszczyźnie po różnych stronach prostej leżące przecina ją, więc, wnoszono, — funkcja ciągła zmieniająca znak powinna przejść przez zero. Rozumowanie takie znajdujemy nawet u Cauchy'ego w jego wykładach w Szkole Politechnicznej (×) i to obok ścisłego określenia ciągłości funkcji; rozpowszechniony obecnie dowód wyżej wymienionej własności funkcji ciągłej mieści się dopiero w przypiskach. Cauchy przyjmuje tam istnienie wspólnej granicy dwóch ciągów: rosnącego i malejącego

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_n, \ldots,$$

gdy różnica

$$b_n - a_n$$

maleje nieograniczenie ze wzrostem liczby n. Rzecz sprowadza się zatym do ciągłości dziedziny liczb rzeczywistych, co znów uzasadniane było geometrycznie drogą ustalenia odpowiedniości zupełnej między liczbami a punktami na prostej.

Niezależność od geometrji zarówno omawianego twierdzenia, jak i całej teorji funkcji zmiennej rzeczywistej zapewnioną zostaje dopiero z chwilą utworzenia arytmetycznych teorji liczb rzeczywistych, przyczym mogą być brane pod uwagę jedynie teorje: Dedekinda (××)

(×) A. L. Cauchy, Oeuvres complètes (2). 3. Cours d'Analyse à l'Ecole polytechnique 1, Analyse algébrique.

(××) R. Dedekind, Stetigkeit u. irrationale Zahlen, Braunschweig 1872.

i Russella (*), w których istnienie liczby określonej bezpośrednio czy to jako przekrój czy jako segment nie ulega wątpliwości.

Bolzano (**) widział trudności związane z czysto analitycznym dowodem twierdzenia o przejściu funkcji ciągłej przez zero i starał się ustalić przedewszystkiem, że istnieje granica ciągu zbieżnego, rozumowanie jego zawiera jednak „petitio principii". Natomiast dowód zasadniczej własności funkcji ciągłych odznacza się poza tem nie tylko ścisłością lecz i prostotą budowy pomimo, że Bolzano zajmuje się właściwie ogólniejszym twierdzeniem według którego dwie funkcje ciągłe $f(x)$ i $\varphi(x)$ muszą przybrać wartości równe przynajmniej dla jednej wartości x między α i β, o ile:

$$f(\alpha) < \varphi(\alpha) \quad ; \quad f(\beta) > \varphi(\beta).$$

Nawiasem mówiąc ogólność jest tu tylko pozorną, gdyż zdanie powyższe możemy uważać za bezpośredni wniosek z twierdzenia o przejściu przez zero ciągłej funkcji

$$f(x) - \varphi(x).$$

Bolzano wychodzi z rozważania przyrostów i mniejszych od $\beta-\alpha$ a spełniających nierówność

$$f(\alpha+i) < \varphi(\alpha+i).$$

Istnieje wówczas, powiada, największa z liczb u takich, że i mniejsze od u posiadają powyższą własność. Okazuje się dalej, że wobec ciągłości obu funkcji przy największej wartości u nie zachodzi żaden ze związków:

$$f(\alpha+u) < \varphi(\alpha+u) \quad , \quad f(\alpha+u) > \varphi(\alpha+u),$$

skąd wniosek, że wtedy

$$f(\alpha+u) = \varphi(\alpha+u). \ (\overset{**}{*})$$

Owa liczba u nie jest czym innym, tylko kresem górnym liczb i, zaś $\alpha+u$ kresem górnym liczb $\alpha+i$.

Dowód sam, którego istotną cechą jest właśnie zużytkowanie pojęcia kresu, zyskuje jeszcze na przejrzystości, skoro przyjmiemy, że jedna z funkcyj $f(x)$, $\varphi(x)$ jest stałą.

(*) B. Russell, The Principles of Mathematics, Cambridge 1903 p. 270

(**) B. Bolzano, Rein analytischer Beweis. Ostw. Kl. Leipzig 1905 s. 22

($\overset{**}{*}$) B. Bolzano, ibid. S. 13-14, 31-33.

Otrzymamy wtedy twierdzenie o przechodzeniu funkcji ciągłej w przedz. (α, β) przez każdą wartość pośrednią między wartościami na krańcach przedziału.

Własność ostatnia nie charakteryzuje funkcji ciągłej, jak mniemano dawniej pod wpływem wyobrażeń geometrycznych, nie jest bowiem równoważną określeniu Cauchy'ego.

Darboux (*) odkrył nawet „szczególną" klasę funkcji: nieciągłych a jednak przyjmujących każdą wartość pośrednią. Klasę tę tworzą pochodne o ile istnieją w rozważanych przedziałach i są ograniczone.

Jeśli bowiem

$$F'(x_0) = A \quad , \qquad F'(x_1) = B \; ,$$

zaś M jest liczbą większą od B mniejszą zaś od A, wówczas funkcja

$$F(x) - Mx$$

posiada pochodną dodatnią przy $x = x_0$ a ujemną przy $x = x_1$. Sama funkcja $F(x)$ wzrasta więc na początku przedziału (x_0, x_1), maleje przy końcu, posiada zatym kres górny różny od A. Wobec czego pochodna staje się równą zeru w punkcie, w którym funkcja dosięga górnego kresu, przyczym punkt ten leży wewnątrz przedziału (x_0, x_1). Gdy $0 < \theta < 1$, mamy

$$F'[x_0 + \theta(x_1 - x_0)] - M = 0 .$$

Przeto każda liczba M pośrednia między A i B jest wartością funkcji pochodnej. (**)

Przekonywa nas o tym również twierdzenie o przyrostach skończonych, gdyż iloraz przyrostów, jako funkcja ciągła przybiera każdą wartość pośrednią a wraz z nim przybiera ją pochodna „a fortiori" w tymże przedziale (***).

Jeżeli „pochodna" nie jest ciągłą, wówczas $F'(x + h_1)$ nie dąży do oznaczonej granicy, gdy h_1 zmierza ku zeru, wtedy bowiem na zasadzie twierdzenia o przyrostach skoń-

(*) G. Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues. Annales de l'Ecole Norm. Sup. IV 1875, p. 109–11.

(**) G. Darboux, ibid p. 110.

(***) H. Lebesgue, Leçons sur l'integration. Paris 1904, p. 89.

czonych mielibyśmy

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h_1=0} F'(x+h')$$

czyli

$$F'(x) = \lim_{h'=0} F'(x+h').$$

Tak więc $F'(x)$ byłoby funkcją ciągłą wbrew założeniu.(*)

Istnieje jednak zbiór wartości h, w obrębie którego $F'(x+h_1)$ posiada granicę przy $h_1=0$, jest nim zbiór tych h_1, które spełniają równość

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x+h_1),$$

przyczem $|h_1|<|h|$. Rzecz jasna, że owa granica równać się będzie $F'(x)$ a więc funkcję pochodną możnaby nazwać częściowo ciągłą w punkcie x.

Gdy zechcemy wyrazić tą własność za pomocą nierówności, otrzymamy następujące określenie:

Funkcję $f(x)$ nazywamy częściowo ciągłą w punkcie x_0 jeżeli przy dowolnych dodatnich liczbach ε i δ istnieje wartość x spełniająca nierówności:

$$|x-x_0|<\delta, \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Ponieważ zbiór punktów analitycznych naszej funkcji będzie wówczas w sobie gęstym więc używać możemy nazwy: funkcja gęsta w punkcie x_0.(**)

Otóż nie każda funkcja częściowo ciągła czy gęsta w otoczeniu punktów przedziału (α, β) przybiera wewnątrz niego wartości pośrednie między wartościami na krańcach przedziału.

Powstaje pytanie, czy, łącząc stosownie jedną z własności składających się na określenie funkcji ciągłej z własnościami dającemi się wysnuć z ostatnio podanego określenia, czy nie możnaby otrzymać warunków wystarczających, aby funkcja przybierała każdą wartość pośrednią?

Wiadomo, że, gdy funkcja jest ciągłą, możemy do dowolnej byle dodatniej liczby ε tak dobrać również dodatnią liczbę δ, aby nierówność $|x-x_0|<\delta$

(*) Darboux, ibid. p. 110.

(**) „semidence"

pociągała za sobą obie nierówności:

$$f(x) < f(x_0)+\varepsilon \qquad f(x) > f(x_0)-\varepsilon.$$

Ograniczmy się do jednej z ostatnich nierówności a otrzymamy własność charakteryzującą funkcję górnie czy dolnie półciągłą według określenia Baire'a.

Podobnie postępując z określeniem funkcji gęstej w punkcie x_0, które zawiera również powyższe nierówności ukryte w związku

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon,$$

dochodzimy do pojęć: funkcji dolnie i funkcji górnie półgęstej w punkcie x_0.

Otóż badanie omawianego wyżej dowodu Bolzana z jednej strony, z drugiej zaś rozpatrzenie podstawowych własności funkcji półciągłych wykazało, że istnieją dwie klasy funkcyj półciągłych przyjmujących każdą wartość pośrednią, przyczem własnością wyróżniającą jest półgęstość.

Do tego wyniku przyczyniła się wielce analiza pojęć "maximum" i "minimum" funkcji w danym punkcie. Na nich przecież opiera Baire określenie funkcji górnie i dolnie półciągłej.

Zaczniemy właśnie od owych liczb Baire'a i porównamy ich własności z własnościami najwyższej i najniższej granicy funkcji w danym punkcie. Doprowadzi nas to do pojęcia funkcji dokładnie górnie wzgl. dolnie półciągłej. Otóż okaże się, że ~~funk~~ funkcja np. górnie półciągła w pewnym punkcie jest nietylko górnie półciągła ale i dolnie półgęsta w tymże punkcie. Tak więc na innej drodze dojdziemy znowu do wyprowadzonego wyżej pojęcia.

W rozdziale drugim zajmiemy się najprostszymi sposobami tworzenia funkcyj półciągłych z danych funkcyj tegoż rodzaju a to za pomocą dodawania i mnożenia zarówno skończonego jak i nieskończonego. Przekonamy się przytem, że sposoby te nie stosują się do funkcyj półgęstych, jakkolwiek ostatnia własność zachowuje się przy przejściu do granicy.

(*) R. Baire. Leçons sur les fonctions discontinues, Paris 1905, p. 71.

Przedmiotem następnego rozdziału, trzeciego, będzie ustalenie tych własności funkcji półciągłych, które przysługują również funkcjom ciągłym, a więc: ograniczoności i dosięgania kresu, przyczem mówić będziemy o ograniczeniu z góry i górnym kresie funkcji górnie półciągłej zaś o ograniczeniu z dołu i dolnym kresie funkcji dolnie półciągłej.

W rozdziale ostatnim, korzystając z ustanowionych pojęć i wyjaśnionych własności, udowodnimy kilka twierdzeń, które dadzą nam warunki wystarczające, aby funkcja wewnątrz każdego przedziału (α, β) będącego częścią (a,b) przyjmowała każdą wartość pośrednią między wartościami na krańcach pierwszego przedziału. Otrzymamy następnie warunki konieczne i wystarczające, aby funkcja górnie czy dolnie półciągła posiadała powyższą własność w obrębie przedziału (a,b) (*). Okaże się, że istnieją dwie klasy funkcji półciągłych tego rodzaju, tworzą je funkcje dokładnie półciągłe t.j. takie, w których najwyższa względnie najniższa granica zarówno z prawej, jak z lewej strony równają się wartości funkcji.

(*) Mówiąc: funkcja posiada w obrębie przedziału (a,b) pewną własność punktową, rozumiemy, że funkcja posiada tą własność w każdym punkcie wewnętrznym, zaś na krańcach tylko po stronie przedziału.

Rozdział I

Określenia i zależności między niemi.

W celu badania nieciągłości R. Baire wprowadził pojęcia: **maximum** i **minimum** funkcji w danym punkcie. „Maximum funkcji $f(x)$ w punkcie A jest to kres dolny górnych kresów funkcji $f(x)$ w przedziałach CD zawierających A jako punkt wewnętrzny.“ (*) Podobnież zamieniając tylko słowa „górny“ i „dolny“ określa się minimum funkcji $f(x)$ w punkcie A. Obie te liczby istnieją oczywiście w każdym punkcie danego przedziału, skoro tylko funkcja jest w tym przedziale określoną i ograniczoną; wartość ich zależy od funkcji i obranego punktu A, więc też Baire oznacza je odpowiednio symbolami: $M(f, A)$, $m(f, A)$.

Liczba $M(f, A)$ posiada następującą podwójną własność charakterystyczną:

1°. Jakąkolwiek byłaby dodatnia liczba ε, można oznaczyć przedział CD, wewnątrz którego znajduje się A, przyczem w każdym jego punkcie mamy

$$f < M(f, A) + \varepsilon .$$

2°. Jakąkolwiek byłaby dodatnia liczba ε oraz przedział CD, zawierający wewnątrz punkt A, istnieje w przedziale CD punkt A' taki, że

$$f(A') > M(f, A) - \varepsilon . \quad (**)$$

Nietrudno udowodnić, że powyższa własność podwójna równoważna jest określeniu Baire'a, to znaczy stanowi jego warunek konieczny i wystarczający. Okazuje się następnie, że można ograniczyć się do tych przedziałów CD w środku których znajduje się A (***), a nawet do ich wnętrza. Jeżeli bowiem istnieje przedział CD, w którym

$$f < M(f, A) + \varepsilon ,$$

wówczas nierówność ta zachodzić będzie dla każdego punktu wewnątrz przedziału $C'D'$, będącego częścią CD,

(*)(**) Baire, ibid p. 70.

(***) t.j. przedz. takich, że $CA = AD$.

a zawierającego w swym środku punkt A. Podobnież, jeśli w każdym przedziale CD istnieje A′ spełniające nierówność

$$f(A') > M(f, A) - \varepsilon,$$

istnieje ono również wewnątrz przedziału C″D″ obejmującego przedział CD a mającego ~~p~~ po środku punkt A.

Z powyższego wynika, że podobnie określeniu Baire'a równoważnemu owej podwójnej własności możnaby nadać następującą postać, zastępując przytym termin „maximum" przez „kres górny":

Kresem górnym funkcji $f(x)$ przy $x = x_0$ nazywamy dolny kres górnych kresów tej funkcji w przedziałach $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, gdzie δ jest dowolną liczbą dodatnią.

Mutatis mutandis określamy kres dolny funkcji $f(x)$ przy $x = x_0$. O ile rozważania dotyczą stale tej samej funkcji możemy oznaczać kresy krócej przez $M(x_0)$, $m(x_0)$.

Liczba $M(x_0)$ posiadać będzie dwie własności:

(A). Do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę dodatnią δ, aby przy wszelkich wartościach x nierówność

$$|x - x_0| < \delta$$

pociągała za sobą nierówność

$$f(x) < M(x_0) + \varepsilon.$$

(B). Jakiekolwiek byłyby dodatnie liczby ε i δ istnieje wartość x spełniająca związki:

$$|x - x_0| < \delta \quad , \quad f(x) > M(x_0) - \varepsilon.$$

Obie te własności razem wzięte równoznaczne są z ostatnim określeniem czyli tworzą warunek konieczny i dostateczny, aby $M(x_0)$ było górnym kresem funkcji $f(x)$ w punkcie x_0.

Warunek jest konieczny. Oznaczmy przez M_δ górny kres funkcji $f(x)$ wewnątrz przedziału $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Wartość funkcji nie jest zatym większą od M_δ, gdy

$$|x - x_0| < \delta$$

Ponieważ zaś $M(x_0)$ jest dolnym kresem liczb M_δ, więc do każdej byle dodatniej liczby ε można dobrać takie δ,

że

$$M_\delta < M(x_0)+\varepsilon.$$

Przeto nierówność

$$|x-x_0|<\delta$$

pociąga za sobą, wobec $f(x) \leq M_\delta$ nierówność

$$f(x) < M(x_0)+\varepsilon.$$

Własność (A) (str. 8) jest więc spełnioną, zaś do własności (B) dochodzimy drogą następujących rozważań.

Przy wszelkiej dodatniej liczbie ε istnieje wartość zmiennej x spełniająca warunki:

$$|x-x_0|<\delta \quad , \quad f(x)>M_\delta-\varepsilon\ ,$$

gdyż M_δ jest górnym krejem wartości funkcji $f(x)$ wewnątrz przedziału $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Z drugiej znów strony przy wszelkich dodatnich δ mamy

$$M_\delta \geqq M(x_0)$$

a więc tembardziej zachodzi nierówność

$$f(x) > M(x_0)-\varepsilon\ ,$$

gdy x jest wewnątrz przedziału $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

<u>Warunek jest wystarczający</u>. Załóżmy, że $M(x_0)$ spełnia własności (A) i (B). Jeżeli przez M_δ oznaczymy, jak wyżej, kres górny funkcji $f(x)$ wewnątrz przedziału $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, wówczas niewątpliwie istnieć tam będzie wartość x dla której

$$f(x) > M_\delta-\varepsilon.$$

Lecz we wszystkich punktach wewnętrznych odpowiednio dobranego przedziału $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ mamy według (A)

$$f(x) < M(x_0)+\varepsilon.$$

A więc

$$M_\delta-\varepsilon < M(x_0)+\varepsilon$$

czyli

$$M_\delta < M(x_0)+2\varepsilon.$$

Kładąc $2\varepsilon=\mu$, otrzymujemy, że do każdego μ dobrać można takie δ, aby było

$$M_\delta < M(x_0)+\mu \qquad (1)$$

Z drugiej własności (B) wobec $f(x) \leq M_\delta$ w przedziale $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ wynika, że istnieje wartość x dla której

$$M_\delta > f(x) > M(x_0) - \varepsilon ,$$

a więc

$$M_\delta > M(x_0) - \varepsilon ,$$

jakąkolwiek byłaby dodatnia liczba ε, czyli wreszcie

$$M_\delta \geq M(x_0). \qquad (2)$$

Uzyskane nierówności: (1) na str. 9 zachodząca przy pewnych δ oraz (2) — przy wszelkich (δ) świadczą, że $M(x_0)$ jest dolnym kresem liczb M_δ, a więc stanowi górny kres funkcji $f(x)$ przy $x = x_0$ według podanego na str. 8 określenia a więc i według Baire'a.

Kres dolny funkcji $f(x)$ przy $x = x_0$ posiada podobne charakterystyczne własności:

(a). Do każdej byle dodatniej liczby ε można dobrać taką liczbę δ, aby nierówność

$$|x - x_0| < \delta$$

pociągała za sobą zawsze nierówność

$$f(x) > m(x_0) - \varepsilon .$$

(b). Jakiekolwiek byłyby dodatnie liczby ε i δ istnieje x spełniające obie nierówności:

$$|x - x_0| < \delta \qquad f(x) < m(x_0) + \varepsilon .$$

Rzecz jasna, że kres dolny $m(x_0)$ nie jest większy od kresu górnego $M(x_0)$, zaś wartość funkcji $f(x_0)$ nie wykracza poza te liczby. Jakoż według własności (A) na str. 8 i (a) dla każdego x wewnątrz odpowiednio dobranego przedziału $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a więc i dla x_0 prawdziwe są nierówności:

$$f(x) < M(x_0) + \varepsilon \quad , \quad f(x) > m(x_0) - \varepsilon ,$$

zatym

$$m(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < M(x_0) + \varepsilon$$

przy wszelkim dodatnim ε, wobec czego

$$m(x_0) \leq f(x_0) \leq M(x_0).$$

Ponieważ, jak widzimy chociażby z tego przykładu podstawą dowodu o kresach stanowią przedewszystkiem ich własności charakterystyczne więc najwygodniej byłoby określić kresy za pomocą tych własności.

Skoro istnieje conajwyżej jeden kres dolny kresów górnych funkcji $f(x)$ wewnątrz przedziałów $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ i istnieje więc również jedna conajwyżej liczba $M(x_0)$ sprawdzająca warunki (A) i (B) na str. 8, jest ona kresem górnym funkcji $f(x)$ w punkcie x_0. Podobnież dolnym kresem jest jedyna liczba $m(x_0)$ sprawdzająca warunki (a) i (b) na str. 10.(*)

Z tak ujętych określeń kresów górnego i dolnego można otrzymać określenia najwyższej i najniższej granicy (**) funkcji $f(x)$ przy $x=x_0$. Wystarczy w tym celu uzupełnić każdy z warunków zastrzeżeniem $x \neq x_0$, przez co zostaje wyłączony wpływ wartości funkcji przy $x=x_0$ na określaną liczbę.

A więc ~~t. zw.~~ najwyższa granica $L(x_0)$ spełniać powinna dwa następujące warunki:

(A'). Do każdej byle dodatniej liczby ε można dobrać taką liczbę δ $(\delta>0)$, aby przy wszelkich x podwójna nierówność

$$0<|x-x_0|<\delta$$

pociągała za sobą

$$f(x)<L(x_0)+\varepsilon .$$

(B'). Jakiekolwiek byłyby liczby dodatnie ε i δ istnieje x spełniające nierówności:

$$0<|x-x_0|<\delta \quad , \quad f(x)>L(x_0)-\varepsilon .$$

Gdybyśmy do prawego względnie lewego otoczenia wartości x_0, wówczas określenia górnego kresu i najwyższej granicy w punkcie x_0 przestałyby się różnić między sobą wyznaczając jedną i tą samą liczbę $f(x+0)$ wzgl. $f(x-0)$.(***)

Podobnież, uzupełniając własności charakterystyczne (a) i (b) na str. (10), otrzymamy warunki, które spełniać powinna najniższa granica $l(x_0)$ funkcji $f(x)$ w punkcie x_0:

(a'). Do każdej byle dodatniej liczby ε można dobrać taką liczbę dodatnią δ, aby przy wszelkich wartościach x podwójna nierówność

$$0<|x-x_0|<\delta$$

pociągała za sobą nierówność

$$f(x)>l(x_0)-\varepsilon$$

(*) jednoznaczność może być bezpośrednio wyprowadzona z warunków (A)(B) wzgl. (a)(b)

(**) „la plus grande des limites" (Cauchy), limite supérieure d'indétermination (P. du Bois Reymond)

(***) oznaczenia z Encyclopédie des Sciences Math. édit. fr. T II, V 1, Fasc. 1, p. 27

Między krejem górnym, najwyższą granicą i wartością funkcji istnieją oznaczone związki. Zestawmy ze sobą nierówności:

$$f(x) < M(x_0)+\varepsilon \quad , \quad f(x) > L(x_0)-\varepsilon \, ,$$

które według warunków (A) na str 8 i (B') na str. 11 zachodzą przynajmniej dla jednej wartości x różnej od x_0 w odpowiednio dobranym otoczeniu punktu x_0. Ponieważ wartość x może być tą samą w obu nierównościach, więc

$$L(x_0)-\varepsilon < M(x_0)+\varepsilon$$

jakąkolwiek byłaby dodatnia liczba ε, tak iż

$$L(x_0) \leq M(x_0) .$$

<u>Gdy wartość funkcji przy $x=x_0$ nie jest większą od najwyższej granicy, wówczas mamy $L(x_0)=M(x_0)$.</u>

Istotnie z nierówności

$$f(x_0) \leq L(x_0)$$

wynika, że dla każdego dodatniego ε

$$f(x_0) < L(x_0)+\varepsilon \, ,$$

a więc najwyższa granica $L(x_0)$ spełnia nierówność

$$f(x) < L(x_0)+\varepsilon$$

również przy $x=x_0$, innymi słowy wraz z krejem górnym czyni zadość warunkowi (A) na str. 8. Warunek (B) jest również spełniony, skoro bowiem w każdym otoczeniu x_0 istnieje wartość zmiennej x różna od x_0, dla której

$$f(x) > L(x_0)-\varepsilon \, ,$$

to tembardziej istnieć będzie, gdy odrzucimy zastrzeżenie $x \neq x_0$. Ponieważ zatym najwyższa granica $L(x_0)$ spełnia warunki (A) i (B) wyznaczające krej górny $M(x_0)$, więc

$$L(x_0)=M(x_0).$$

Rozpatrzmy pozostałą możliwość: wartość funkcji przy $x=x_0$ jest większą od najwyższej granicy $L(x_0)$ czyli

$$f(x_0) > L(x_0). \qquad (3)$$

Otóż w dostatecznie małym otoczeniu punktu x_0 nie zawierającym tego punktu zachodzi nierówność

$$f(x) < L(x_0)+\varepsilon$$

dla wszelkiej liczby dodatniej ε, wobec zaś przyjętego założenia (3)

będzie

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

przyczym związek ten nie przestaje być prawdziwym, gdy $x = x_0$. Zatym warunek (A) jest spełniony, gdy zamiast $M(x_0)$ podstawimy $f(x_0)$; co zaś do warunku (B) to ten niewątpliwie spełniony jest również, gdy położymy $M(x_0) = f(x_0)$, bowiem przy dowolnym dodatnim ε mamy przecież

$$f(x_0) > f(x_0) - \varepsilon,$$

a więc liczbą sprawdzającą nierówności:

$$|x - x_0| < \delta \quad , \quad f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

jest x_0.

Jednym słowem <u>$f(x_0)$ jest ~~wtedy~~ górnym kresem funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, czyli</u>

$$f(x_0) = M(x_0),$$

<u>gdy $f(x_0) > L(x_0)$</u>.

Widzimy stąd, że górny kres funkcji przy $x = x_0$ równa się wartości funkcji lub jest jej najwyższą granicą (a więc większą z dwuch liczb $f(x-0)$, $f(x+0)$) przyczym pierwsza z owych możliwości nie wyłącza drugiej.

Gdy

$$f(x_0) = M(x_0),$$

funkcja nosi według Baire'a nazwę <u>górnie półciągłej w punkcie</u> x_0(*), gdy zaś prócz tego

$$f(x_0) = L(x_0),$$

wówczas wszystkie trzy liczby $f(x_0)$, $M(x_0)$, $L(x_0)$ są sobie równe, funkcja zaś ~~jest~~ posiada więcej własności niż górnie półciągła; nazwiemy ją <u>dokładnie górnie półciągłą</u> przy $x = x_0$.

W pierwszym wypadku t. j. gdy wiemy tylko, że

$$f(x_0) = M(x_0) \qquad (4).$$

warunek (B) ze str. 8 przestaje być istotnym, liczbą bowiem, która zawsze sprawdza nierówności:

$$|x - x_0| < \delta \quad , \quad f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

jest przecież x_0.

Funkcję górnie półciągłą można zatym scharakteryzować zapomocą własności, jaką otrzymamy z warunku (A) kładzie $M(x_0) = f(x_0)$

(*) „semicontinue inférieurement", Baire, ibid p. 71.

Otrzymujemy:

(A'') Do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę δ, aby przy wszelkich wartościach x nierówność

$$|x - x_0| < \delta$$

pociągała za sobą nierówność

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \, . \quad (^*)$$

Zdanie to jest równoważne równości (4), gdyż zgodnie z (A'') warunki (A) i (B) na str. 8 spełnione są przecież przez wartość funkcji w punkcie x_0, a więc $f(x_0)$ jest górnym kresem funkcji $f(x)$ przy $x = x_0$, o ile ta posiada własność (A'').

W drugim wypadku, gdy zachodzi jeszcze równość

$$f(x_0) = \mathcal{L}(x_0)$$

warunek (A') (str 11) przybiera postać równoznaczną z (A''), gdyż przy $x = x_0$ niewątpliwie prawdziwą jest nierówność

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \, ,$$

warunek zaś (B') pozostanie w mocy. A więc funkcję dokładnie górnie półciągłą charakteryzują własność (A'') oraz

(B'') Jakiekolwiek byłyby dodatnie liczby ε i δ istnieje x spełniające związki

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad , \quad f(x) > f(x_0) - \varepsilon \, .$$

Funkcję posiadającą tą własność nazwaliśmy przez podobieństwo dolnie półgęstą w punkcie x_0 (xx). Widzimy więc, że funkcja dokładnie górnie półciągła przy $x = x_0$ jest w punkcie x_0 górnie półciągłą i dolnie półgęstą.

Ostatnia własność usprawiedliwia niejako przysłówek: „dokładnie", oznacza ona bowiem, że wartość funkcji w punkcie x_0 nie jest odosobnioną, co przecież nie zachodzi dla funkcji innych półciągłych.

Funkcje np. o nieciągłościach pierwszego rodzaju są wtedy i tylko wtedy górnie półciągłymi, jeśli w punktach nieciągłości

---

(*) Według Baire'a nierówność ta powinna być spełniona w odpowiednio dobranym przedziale CD zawierającym wewnątrz punkt x_0 por. str. 7 niniejszego rozdziału

(xx) por. str. 5, Wstęp.

$$f(x_0) \geq f(x_0-0),\ f(x_0+0),$$

większa bowiem z liczb $f(x_0-0), f(x_0+0)$ jest najwyższą górną granicą funkcji $f(x)$ przy $x=x_0$, zaś nierówność

$$f(x_0) \geq L(x_0) \qquad (5)$$

jest warunkiem koniecznym a nawet wystarczającym, aby funkcja $f(x)$ była górnie półciągłą w punkcie x_0.

Z jednej bowiem strony z równości

$$f(x_0) = L(x_0)$$

wynika, jak dowiedliśmy na str. 12, że

$$L(x_0) = M(x_0),$$

a więc

$$f(x_0) = M(x_0),$$

ponieważ zaś ostatnia równość jest prawdziwą, gdy $f(x_0) > L(x_0)$ (por. str. 13) więc funkcja $f(x)$ jest górnie półciągłą w punkcie x_0, skoro zachodzi warunek (5).

Z drugiej znów strony, zestawiając zależności:

$$f(x_0) = M(x_0) \qquad M(x_0) \geq L(x_0),$$

z których pierwsza oznacza, że $f(x)$ jest górnie półciągłą, a ostatnią ustalilona była na str. 12, — otrzymujemy warunek (5).

Górnie półciągłą jest zatym funkcja $E(x)$ określona dla bezwzględnych wartości x, jako największa z liczb naturalnych nie większych od x. Możemy się o tem przekonać bezpośrednio.

Gdy n jest liczbą naturalną spełniającą warunek

$$n \leq x < n+1,$$

wówczas

$$E(x) = n.$$

Aby więc zachodziła nierówność

$$E(x) < E(n) + \varepsilon \qquad (6)$$

dla danego dodatniego ε, wystarczy wziąć $x < n+1$. Biorąc następnie liczbę dodatnią δ mniejszą od jedności, widzimy, że nierówność

$$|x-n| < \delta$$

pociąga za sobą nierówność (6), jakąkolwiek byłaby liczba dod. ε.

Zatym $E(x)$, spełniając w punktach n warunek (A'') str. 14, jest w tych punktach górnie półciągłą, że zaś jest ciągłą w punktach pozostałych, więc możemy mówić o górnej półciągłości funkcji $E(x)$ w całym obszarze zmienności x.

Baire określa funkcję dolnie półciągłą przy $x=x_0$ za po-

mocą równości

$$f(x_0)=m(x_0),$$

gdzie $m(x_0)$ jest dolnym kresem $f(x)$ przy $x=x_0$.

Możnaby to również uczynić przez podanie warunku następującego:

(A″). Do każdej byle dodatniej liczby ε można dobrać taką dodatnią liczbę δ, aby przy wszelkich wartościach x nierówność

$$|x-x_0|<\delta$$

pociągała za sobą nierówność

$$f(x)>f(x_0)-\varepsilon .$$

Określenie funkcji dokładnie dolnie półciągłej zawierać powinno jeszcze warunek:

(B″). Jakiekolwiek byłyby dodatnie liczby ε i δ, istnieje wartość x spełniająca nierówności:

$$0<|x-x_0|<\delta \qquad f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$

Funkcję czyniącą zadość warunkowi (B″) nazywać będziemy górnie półciągłą w punkcie x_0.

Rozpatrzmy w charakterze przykładu funkcję równającą się: bezwzględnej wartości różnicy między daną liczbą bezwzględną a najbliższą jej liczbą naturalną lub zeru, jeśli x jest średnią arytmetyczną dwu kolejnych liczb naturalnych.

Niech n oznacza liczbę naturalną, zaś $D(x)$ będzie znakiem naszej funkcji, której określenie możemy zawrzeć w następującej tablicy:

$$n\leq x<n+\tfrac{1}{2} \qquad D(x)=x-n \;;$$

$$x=n+\tfrac{1}{2} \qquad D(x)=0$$

$$n+\tfrac{1}{2}<x<n+1 \qquad D(x)=n+1-x \;.$$

Będzie to funkcja o nieciągłości usuwalnej przy $x=n+\frac{1}{2}$. Ponieważ

$$D(x_0)\leq \lim_{x=x_0} D(x),$$

więc funkcja jest dolnie półciągłą, jak to można wywnioskować z wywodów na str. 15. Rozpatrując zaś nierówność $D(x)<D(n+\frac{1}{2})-\varepsilon$ widzimy, że jest ona spełnioną przy wszelkim dodatnim ε, bowiem $D(x)\geq 0$.

Przykładem funkcji dokładnie górnie półciągłej może służyć:

$$f(x)=\lim \frac{\pi}{x+2E\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$$

Rozdział II

Tworzenie funkcji półciągłych za pomocą dodawania i mnożenia.

Twierdzenie I Jeżeli przy pewnej wartości x_0 zmiennej x funkcja $f(x)$ jest górnie półciągłą, wówczas funkcja $-f(x)$ jest dolnie półciągłą dla tejże wartości (*) i odwrotnie.

Nierówność $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$, możemy mnożąc przez -1 przedstawić w postaci

$$-f(x) > -f(x_0) - \varepsilon .$$

Obie te nierówności zachodzą dla wszystkich x spełniających warunek

$$|x - x_0| < \delta ,$$

gdzie δ jest liczbą zależną od ε. A więc funkcja $-f(x)$, jako posiadająca własność (A'') str. 16, jest dolnie półciągłą w punkcie x_0.

Twierdzenie II Suma dwuch funkcji $f(x)$ i $g(x)$ górnie półciągłych przy wartości x_0 zmiennej x jest również funkcją górnie półciągłą przy $x = x_0$. (*)

Zgodnie z podanym na str. 14 własnością (A'') funkcji górnie półciągłych, do dowolnej byle dodatniej liczby ε można dobrać takie liczby dodatnie δ' i δ'', aby warunki:

$$|x - x_0| < \delta' \quad , \quad |x - x_0| < \delta'' \qquad (7)$$

pociągały za sobą odpowiednio nierówności:

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad , \quad g(x) < g(x_0) + \varepsilon . \qquad (8)$$

Biorąc liczbę δ nie większą od δ' i δ'', możemy zastąpić warunki (7) jedną nierównością

$$|x - x_0| < \delta .$$

Dodając stronami nierówności (8) otrzymujemy

$$f(x) + g(x) < f(x_0) + g(x_0) + 2\varepsilon$$

Jakąkolwiek ~~więc~~ byłaby dodatnia liczba μ możemy tak dobrać ε aby było

$$0 < 2\varepsilon \leq \mu ,$$

wówczas na zasadzie poprzedniego istnieje liczba dodatnia δ tego rodzaju, że z nierówności

$$|x - x_0| < \delta$$

wynika

$$f(x) + g(x) < \{ f(x_0) + g(x_0) \} + \mu ,$$

co dowodzi, że suma $f(x) + g(x)$ jest funkcją górnie półciągłą w punkcie x_0.

(*) Baire. Ibid p. 72.

Wniosek 1. Suma funkcji dolnie półciągłych przy $x=x_0$ jest funkcją dolnie półciągłą dla tejże wartości zmiennej niezależnej.

Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą dolnie półciągłymi przy $x=x_0$, oznaczmy ich sumę przez $F(x)$

$$F(x)=f(x)+g(x).$$

Mnożąc tą równość przez -1, otrzymujemy

$$-F(x)=-f(x)+\{-g(x)\}.$$

Otóż funkcje $-f(x)$, $-g(x)$ są górnie półciągłymi na mocy twierdzenia I, zgodnie zaś z tw. II funkcja $-F(x)$, jako ich suma jest również górnie półciągłą w punkcie x_0, a więc znowu na mocy tw I funkcja $F(x)$ jest w tymże punkcie dolnie półciągłą.

Wniosek 2. Różnica funkcji górnie (dolnie) półciągłej i dolnie (górnie) półciągłej przy $x=x_0$ jest funkcją górnie (dolnie) półciągłą dla tejże wartości. (*)

Niech $f(x)$ będzie funkcją górnie, zaś $g(x)$ dolnie półciągłą przy $x=x_0$. Otóż

$$f(x)-g(x)=f(x)+\{-g(x)\},$$

a więc różnica naszych funkcji może być uważana za sumę funkcji górnie półciągłych $f(x)$ i $-g(x)$ i jako taka jest górnie półciągłą dla wartości x_0.

Przykład 1. Rozpatrywaliśmy na str. 15-16 funkcje $\mathcal{E}(x)$ i $\mathcal{D}(x)$, z których pierwsza jest górnie druga dolnie półciągłą dla bezwzględnych wartości x. Funkcja

$$\mathcal{F}(x)=\mathcal{E}(x)-\mathcal{D}(x)$$

będzie górnie półciągłą, o czem można się również przekonać bezpośrednio.

Twierdzenie III. Iloczyn dwuch funkcji $f(x)$, $g(x)$ górnie półciągłych przy $x=x_0$ jest również funkcją górnie półciągłą w punkcie x_0.

Możemy, jak przy dowodzie twierdzenia II dobrać taką liczbę dodatnią δ, aby

$$|x-x_0|<\delta$$

było warunkiem prawdziwości każdego ze związków:

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon, \qquad (9)$$

$$g(x)<g(x_0)+\varepsilon. \qquad (10)$$

Jeżeli dalej zastrzeżemy, że $\varepsilon\leq 1$, wówczas zarówno $f(x)$ jak $g(x)$ są w obrębie przedziału $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ograniczone od góry przez liczbę nie mniejszą od $f(x_0)+1$ i $g(x_0)+1$

(*) Baire, ibid p. 73

Oznaczmy tę liczbę ograniczającą przez A, mamy więc

$$f(x), g(x) < A. \qquad (11)$$

Różnicę iloczynów rozpatrywanych funkcji możemy przedstawić jak następuje

$$f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0) = \{f(x) - f(x_0)\}\,g(x) + \{g(x) - g(x_0)\}\,f(x_0)$$

Zatym na zasadzie nierówności (9) i (10) str. 18 oraz (11)

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) < 2A\varepsilon.$$

Wystarczy więc, gdy daną jest dodatnia liczba μ, wziąć

$$\varepsilon \leq \frac{\mu}{2A}, 1,$$

aby odpowiednio dobrane δ posiadało tę własność, że wartości x spełniające nierówność $|x - x_0| < \delta$ spełnia również nierówność

$$f(x)\,g(x) < f(x_0)\,g(x_0) + \mu,$$

co oznacza (por. (A'') na str. 14), że iloczyn $f(x)g(x)$ jest funkcją górnie półciągłą w punkcie x_0.

Wniosek 3. Iloczyn funkcji dolnie półciągłych dla wartości x_0 zmiennej x jest funkcją górnie półciągłą dla tejże wartości.

Jeśli przez $f(x)$, $g(x)$ oznaczymy funkcje dolnie półciągłe przy $x = x_0$, wówczas funkcje $-f(x)$, $-g(x)$ będą górnie półciągłymi, jak również ich iloczyn zgodnie z twierdzeniem III. Inaczej mówiąc, do dowolnej dodatniej liczby μ będzie można dobrać takie δ, że nierówność

$$|x - x_0| < \delta$$

pociągnie za sobą nierówność

$$-f(x)\{-g(x)\} < -f(x_0)\{-g(x_0)\} + \mu.$$

Lecz ta ostatnia nie różni się istotnie od nierówności

$$f(x)\,g(x) < f(x_0)\,g(x_0) + \mu,$$

zatym iloczyn $f(x)g(x)$ jest funkcją górnie półciągłą przy $x = x_0$.

Przykład 2. Oto funkcja $E(\frac{1}{x})$ jest górnie półciągłą wewnątrz przedziału (0, 1). Weźmy bowiem pod uwagę wartość x_0 zmiennej x, jej odwrotność będzie albo równa liczbie naturalnej albo zawarta między dwoma takiemi liczbami t.j.

$$n \leq \frac{1}{x_0} < n+1, \qquad (12)$$

a wówczas

$$E(\tfrac{1}{x_0}) = n.$$

Ażeby więc zachodziła nierówność

$$E(\tfrac{1}{x}) < E(\tfrac{1}{x_0}) + \varepsilon \qquad (13)$$

przy dowolnym dodatnim ε, wystarczy wziąć

$$\alpha > \frac{1}{n+1}, \qquad (14)$$

wtedy bowiem

$$E\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq n,$$

a więc a fortiori

$$E\left(\frac{1}{\alpha}\right) < n+\varepsilon.$$

Zestawiając nierówności (12) i (14) otrzymujemy jedyny warunek dla x:

$$x_0 - x < \frac{1}{n(n+1)}.$$

Wystarczy więc wziąć $\delta \leq \frac{1}{n(n+1)}$ aby nierówność

$$|x - x_0| < \delta.$$

pociągała za sobą nierówność (13). Funkcja $E\left(\frac{1}{x}\right)$ jest więc górnie półciągłą wewnątrz przedziału (0, 1).

Na zasadzie twierdzenia III funkcja $x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$ jest również górnie półciągłą wewnątrz tegoż przedziału.

Uogólniając wywody poprzednie możemy orzec, że zapomocą działań prostych: mnożenia i dodawania możemy zawsze z funkcji górnie półciągłych utworzyć nową funkcję tegoż rodzaju, innymi wszelka funkcja całkowita dodatnia funkcji górnie półciągłych jest również funkcją górnie półciągłą.

Może się zdarzyć, że nowo utworzona funkcja jest przytym dolnie półgęstą jak np. $x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$, lecz jest to sprawa przypadku. Twierdzenia o dodawaniu i mnożeniu funkcji górnie półciągłych nie dadzą się rozszerzyć nietylko na funkcje górnie półgęste ale nawet wogóle na gęste funkcje, gdyż nigdy nie jest zapewnione istnienie dla dwóch różnych funkcji tej samej wartości zmiennej x, przy której spełnione byłyby nierówności wymienione w (6'') czy (6''') na str. 16.

Natomiast twierdzenie I, jak to wynika ze sposobu dowodzenia, jest również prawdziwe i dla funkcji półgęstych, mamy więc.

<u>Wniosek 4.</u> <u>Jeżeli jedna z funkcji $f(x)$, $g(x)$ spełniających warunek</u>

$$f(x) + g(x) = 0$$

<u>jest górnie półgęstą przy $x = x_0$, pozostała jest wtedy dolnie półgęstą przy tejże wartości x_0.</u>

Aby przejść od rozważania sum i iloczynów skończonych do nieskończonych, ustalimy przedewszystkiem, że półciągłość górna zachowuje się przy przejściu do granicy.

Twierdzenie IV. Niech $f(x,n)$ będzie funkcją zmiennej całkowitej dodatniej n i zmiennej rzeczywistej x. Jeśli $f(x,n)$ jest funkcją górnie półciągłą w punkcie x_0 należącym do wnętrza przedziału (a,b), w którym $f(x,n)$ zmierza jednostajnie do $F(x)$, wówczas f. $F(x)$ jest górnie półciągłą w punkcie x_0.

Zgodnie z założeniem do dowolnej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę δ $(\delta > 0)$, aby dla wszystkich punktów wewnętrznych przedziału $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ prawdziwą była nierówność

$$f(x,n) < f(x_0,n)+\varepsilon. \quad (15)$$

Weźmy tak małą liczbę δ' nie większą od δ, aby zachodziły nierówności

$$a \leqq x_0-\delta', \quad x_0+\delta' \leqq b,$$

wówczas wszystkie punkty przedziału $(x_0-\delta', x_0+\delta')$ należeć będą do wnętrza przedziału (a,b), przyczem spełniać będą nierówność (15).

Otóż jakąkolwiek byłaby dodatnia liczba μ istnieje tak wielka liczba N, że dla wszystkich wartości zmiennej x w przedziale (a,b) a więc i $(x_0-\delta', x_0+\delta')$ zachodzi nierówność

$$|f(x,n) - F(x)| < \mu, \quad (16)$$

o ile tylko

$$n > N.$$

Nierówność (16) zachodzi więc dla tych samych wartości co i (15), możemy zatem zestawić trzy nierówności:

$$\left.\begin{aligned} F(x) - f(x,n) &< \mu, \\ f(x,n) - f(x_0,n) &< \varepsilon, \\ f(x_0,n) - F(x_0) &< \mu, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

w których wartości zmiennych x i n są odpowiednio te same. Dodając stronami nierówności (17), otrzymujemy

$$F(x) - F(x_0) < 2\mu+\varepsilon, \quad (18)$$

gdzie $2\mu+\varepsilon$ zależy od dowolnie obranych liczb dodatnich μ i ε, a więc jest również liczbą dodatnią. Mając więc daną liczbę $\sigma > 0$, możemy tak obrać ε i μ, aby było

$$2\mu+\varepsilon \leqq \sigma$$

następnie zaś znaleźć δ', wówczas nierówność

$$|x - x_0| < \delta'$$

pociągać będzie za sobą związek

$$F(x) < F(x_0) + \sigma.$$

Z natury dowodu widać, że twierdzenie podobne prawdziwe jest również dla funkcji dolnie półciągłej.

Ponieważ z układu (17) wynika (18), o ile istnieje chociaż jedna wartość zmiennej x w przedziale $(x_0 - \delta', x_0 + \delta')$, spełniająca ~~pierwszą~~ nierówność (15), więc możemy rozszerzyć tw. IV na funkcje górnie półgęste w otoczeniu x_0.

Wniosek 5. Jednostajna granica w przedziale (a, b) funkcji $f(x, n)$ górnie półgęstej w otoczeniu punktu x_0 wewnątrz prz. (a, b) jest również funkcją półgęstą w otoczeniu tegoż punktu x_0.

Ponieważ suma funkcji górnie półciągłych jest według tw. II, również funkcją półciągłą tego rodzaju więc na mocy zasady indukcji matematycznej wnosimy, że półciągłą górnie jest również suma

$$\sum_{n=1}^{n=k} f(x, n).$$

Przyjmując tą sumę za nową funkcję zmiennych x i n wypowiemy:

Wniosek 6. Jeżeli wyrazy szeregu jednostajnie zbieżnego w przedziale (a, b) są funkcjami górnie (dolnie) półciągłymi dla pewnej wartości zmiennej x wewnątrz tego przedziału, wówczas suma szeregu jest funkcją górnie (dolnie) półciągłą dla tejże wartości x.

Podobnież rozumując wyprowadzimy z twierdzeń III i IV

Wniosek 7. Jeżeli wyrazy iloczynu nieskończonego w p. (a, b) są funkcjami górnie (dolnie) półciągłymi dla pewnej wartości x_0 wewnątrz przedziału (a, b), wówczas iloczyn nieskończony jest funkcją górnie półciągłą przy $x = x_0$.

Przykład 3. Rozpatrzmy wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1} \frac{2E(nx) - nx}{n^3}$$

Łatwo przekonać się, że $E(nx)$ podobnie jak $E(x)$ jest funkcją górnie półciągłą. Gdy m jest całkowitą częścią liczby nx,

$$m \leqq nx < m+1$$

zaś

$$E(nx)=m .$$

Aby więc prawdziwą była nierówność

$$E(nx) < E(m)+\varepsilon \qquad (19)$$

i to nawet niezależnie od wartości dodatniej liczby ε, wystarczy przyjąć

$$x < \frac{m+1}{n} .$$

Wnosimy stąd, że, gdy $\delta < \frac{1}{n}$ wówczas nierówność (19) zachodzi dla wszystkich wartości zmiennej x wewnątrz przedziału $\left(\frac{m}{n}-\delta, \frac{m}{n}+\delta\right)$, odpowiadającemu punktowi nieciągłości $\frac{m}{n}$.

Ponieważ $-nx$ jest funkcją ciągłą zmiennej x, a więc zarówno dolnie jak i górnie ciągłą, podobnież $2, \frac{1}{n^3}$, jako stałe, więc każdy wyraz szeregu

$$\frac{2E(nx)-nx}{n^3}$$

jest na mocy twierdzeń II i III funkcją górnie półciągłą tak w punktach nieciągłości jak i we wszystkich pozostałych bezwzgl.

Szereg rozpatrywany jest ponytym jednostajnie zbieżny w przedziale niewłaściwym $(0, +\infty)$. Istotnie, mamy ~~przecie~~

$$E(nx) \leqq nx ,$$

a więc

$$\frac{2E(nx)-nx}{n^3} \leqq \frac{x}{n^2} .$$

A przecież szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$$

jest jednostajnie zbieżny, zbieżnym zatem będzie jedn. szereg o wyrazach odpowiednio nie większych. Stosując wniosek 6 orzekamy, że funkcja

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E(nx)-nx}{n^3}$$

jest górnie półciągłą dla wszystkich bezwzględnych wartości zmiennej x.

<u>Przykład 4</u>. Darboux podaje w cytowanej wyżej rozprawie (*) przykład funkcji nieciągłej w każdym przedziale liczb bezwzględnych,

$$f(x)=a_1\frac{E(x)}{x}+a_2\frac{E(2x)}{2x}+\ldots\ldots+a_n\frac{E(nx)}{nx}+\ldots$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ są stałymi, których szereg jest zbieżny. Ponieważ

$$\frac{E(nx)}{nx} \leq 1 ,$$

więc szereg $f(x)$ jest jednostajnie zbieżny, a więc przedstawia funkcję górnie półc.

(*) <u>G. Darboux</u>, ibid. p. 80

Rozdział III

Własności funkcji półciągłych.

Własności funkcji półciągłych zależą od rodzaju półciągłości: funkcja półciągła górnie dla każdej wartości zmiennej x należącej do danego przedziału posiada nieco inne własności niż funkcja dolnie półciągła w tymże przedziale. Zestawiając twierdzenia dotyczące obu rodzai półciągłości, otrzymamy znane własności funkcji ciągłych, która jest przecież zarazem górnie i dolnie półciągła.

Twierdzenie V. Funkcja $f(x)$ górnie półciągła w przedziale (a,b) jest w nim ograniczoną z góry (*).

Zgodnie z założeniem funkcja $f(x)$ jest górnie półciągłą przy $x=a$, a więc do danej liczby dodatniej ε możemy tak dobrać δ $(\delta>0)$, aby w przedziale $(a-\delta, a+\delta)$ [a więc i w $(a, a+\delta)$] funkcja spełniała nierówność

$$f(x) < f(a)+\varepsilon .$$

Zatym $f(x)$ jest ograniczoną z góry w przedziale $(a, a+\delta)$.

Weźmy pod uwagę zbiór Z liczb β większych od a, zaś nie-większych od b. Zbiór ten nie jest pusty, gdyż należy do niego przedewszystkiem $a+\delta$, prawy kraniec przedziału $(a, a+\delta)$. Ponieważ zbiór Z jest ponytym ograniczony z góry, więc istnieje jego kres górny K. Powiadam, że $K=b$.

Istotnie, w przeciwnym bowiem razie $K<b$. ~~A więc~~ do danej dodatniej liczby ε można według założenia w ten sposób dobrać δ $(\delta>0)$, aby nierówność

$$|x-K|<\delta$$

pociągała za sobą związek

$$f(x)<f(K)+\varepsilon . \qquad (20)$$

Biorąc dalej dodatnią liczbę δ', któraby czyniła zadość warunkom

$$\delta'<\delta \quad , \quad K-\delta'>a \quad , \quad K+\delta'<b ,$$

co jest zawsze możliwe, gdyż zgodnie z założeniem tymczasowym

$$a<K<b ,$$

otrzymamy przedział $(K-\delta', K+\delta')$, wewnątrz którego tembardziej zachodzić będzie nierówność (20), a więc funkcja pozostanie ograniczoną z góry.

(*) Rozumie się, że funkcja półciągła w przedziale (a,b) jest półciągłą w każdym jego punkcie nie wyłączając krańców.

Ponieważ K jest kresem górnym zbioru Z, przeto istnieje w tym zbiorze liczba β, spełniająca warunek
$$K-\delta' < \beta \leq K .$$
Łącząc więc zachodzące na siebie przedziały ~~w jeden~~: (a, β) i $(K-\delta', K+\delta')$ otrzymujemy przedział $(a, K+\delta')$ składający się ze wszystkich punktów prz. (a,β) i tych punktów przedziału $(K-\delta', K+\delta')$, które nie należą do (a,β). Wewnątrz $(a, K+\delta')$ funkcja $f(x)$ jest, jak widać z poprzedniego ograniczoną z góry, a więc K nie jest kresem górnym zbioru Z, istnieje bowiem liczba tego zbioru $K+\delta'$ większa od K. Doszliśmy zatym do sprzeczności, przyjmując, że $K \neq b$.

Jeżeli teraz, t.j. wróciwszy do równości $K=b$, dobierzemy do danej dodatniej liczby ε liczbę dodatnią δ w ten sposób, aby wewnątrz przedziału $(b-\delta, b)$ zachodziła nierówność
$$f(x) < f(b)+\varepsilon ,$$
co jest możliwe wobec górnej półciągłości funkcji $f(x)$ w punkcie krańcowym b, wówczas funkcja nasza będzie ograniczoną w tym przedziale. Ponieważ, jak dowiedliśmy, $K=b$, więc istnieje w zbiorze Z liczba β spełniająca warunek
$$b-\delta < \beta \leq b .$$
Połączmy w jeden przedziały (a,β) i $(b-\delta, b)$, które jak widzimy zachodzą na siebie, otrzymamy przedział całkowity (a, b). Z powyższego wynika, że funkcja $f(x)$ jest ograniczona wewnątrz przedziału (a, b); skoro zaś jest oznaczoną na krańcach, więc jest ograniczoną w przedziale (a,b).

<u>Wniosek 8.</u> <u>Funkcja $f(x)$ dolnie półciągła w przedziale (a,b) jest ograniczoną z dołu w jego obrębie.</u>

Utwórzmy funkcję $g(x) = -f(x)$, będzie ona górnie półciągłą na zasadzie tw. I. Jeżeli funkcja $g(x)$ jest ograniczoną z góry w przedziale (a,b), jak to można wnosić z tw V, czyli, gdy istnieje liczba A taka, że w całym przedziale (a,b) mamy
$$g(x) \leq A ,$$
wówczas
$$f(x) = -g(x) \geq -A .$$
a więc funkcja $f(x)$ jest ograniczoną z dołu w tymże przedziale.

Ponieważ funkcja ciągła spełnia zarówno warunek (A'')

na str 14 jak i warunek (A'') z str. 16, więc otrzymujemy jako wniosek znane twierdzenie o ograniczoności funkcji ciągłej.

Wniosek 9. Funkcja ciągła w przedziale (a, b) jest w tym przedziale ograniczona.

Ponieważ zbiór wartości f. f(x) górnie półciągłej w przedziale (a, b) jest nie pusty i ograniczony z jednej strony, więc otrzymujemy:

Wniosek 10. Funkcja górnie (dolnie) półciągła w przedziale (a, b) posiada w tym przedziale kres górny (dolny)

Wniosek 11. Funkcja górnie (dolnie) półciągła w przedziale (a, b) posiada w każdym jego punkcie ~~wewnętrznym~~ kres górny (dolny)

Widomo, że kres górny w punkcie x_0 równa się wartości funkcji w tym punkcie

$$M(x_0) = f(x_0)$$

A więc funkcja: „kres górny funkcji f(x)" dla różnych wartości w przedziale (a, b) jest funkcją górnie półciągłą.(*)

Twierdzenie VI Funkcja górnie półciągła w przedziale (a, b) dosięga w jego obrębie górnego kresu.

Oznaczmy przez M kres górny funkcji f(x) w przedziale (a, b), który przecież na zasadzie tw. V istnieje, skoro funkcja f(x) jest górnie półciągłą.

Weźmy pod uwagę przedziały (a, β), rozpoczynające się w punkcie a zaś posiadające kranice β w przedz. (a, b):

$$a < \beta \leqq b .$$

Funkcja nasza posiada w tych przedziałach kresy górne nie większe od M. Zbiór Z prawych kranic przedziałów (a, β), w których f(x) ma kres **równy** liczbie M, nie jest pusty, należy bowiem do niego koniec przedziału (a, b). Ponieważ β > a więc istnieje kres dolny k zbioru Z.

Skoro M jest kresem górnym funkcji f(x) w każdym z rozważanych przedziałów (a, β), więc:

1). gdy

$$a \leqq x \leqq \beta ,$$

wówczas

$$f(x) \leqq M ,$$

2) jakąkolwiek byłaby dodatnia liczba ε istnieje

(*) Baire udowadnia to na podstawie własności podobnej do (A'') loc. cit. p. 72.

wartość x spełniająca nierówności

$$a \leq x \leq \beta \qquad f(x) > M - \varepsilon$$

Kres dolny k zbioru Z spełnia następujące warunki:

3) $k \leq \beta$ dla wszystkich liczb β zbioru Z

4) do dowolnej byle dodatniej liczby δ można dobrać taką liczbę β zbioru Z, aby było

$$\beta < k + \delta$$

Na mocy warunków 2) i 1) ~~wnosimy, że~~ można znaleźć wartość zmiennej x spełniającą nierówności:

$$a \leq x < k + \delta \quad , \quad f(x) > M - \delta, \qquad (21)$$

gdy dane są liczby dodatnie δ i ε.

Otóż wewnątrz przedziału $(k-\delta, k+\delta)$ musi znajdować się takie x, że

$$f(x) > M - \varepsilon. \qquad (22)$$

Gdyby bowiem $k \neq a$ i każda wartość zmiennej x sprawdzająca nierówności (21) należała do przedziału $(a, k-\delta)$, wówczas k nie byłoby kresem dolnym zbioru Z. Wszak jśli niema wartości funkcji większej od $M-\varepsilon$ wewnątrz przedziału $(k-\delta, k+\delta)$ to taka wartość znajdzie się w przedziale $(a, k-\delta)$. Obierzmy bowiem β tak, aby $k-\delta < \beta < k$

Nierówność (22) będzie wtedy prawdziwą a fortiori w pewnym punkcie przedziału (a, β). Zatym istnieje liczba β zbioru Z mniejsza od k wbrew warunkowi 3).

Z powyższego wnosimy, że jakiekolwiek byłyby liczby liczby dodatnie ε i δ istnieje wartość x wewnątrz przedziału $(k-\delta, k+\delta)$ dla której zachodzi nierówność (22). Otóż funkcja $f(x)$, będąc zgodnie z założeniem ciągłą w przedziale (a, b) jest nią również przy $x = k$, gdyż

$$a \leq k \leq b.$$

A więc do każdej byle dodatniej liczby ε można dobrać takie δ, aby nierówność

$$|x - k| < \delta \qquad (23)$$

pociągała za sobą

$$f(x) < f(k) + \varepsilon \qquad (24)$$

W szczególności istnieć będzie x, które spełnia zarówno nierówności (23), (24) jak i (22).

Dla tej wartości zmiennej x mamy

$$M-\varepsilon < f(x) < f(k)+\varepsilon$$

skąd wnosimy, że

$$M-f(k) < 2\varepsilon$$

przy wszelkiej liczbie dodatniej ε. Ponieważ według warunku 1)

$$f(k) \leq M,$$

więc istnieje jedyna możliwość:

$$f(k)=M.$$

Kres dolny zbioru Z jest zatym ową wartością zmiennej x, przy której funkcja przybiera wartość równą górnemu kresowi funkcji $f(x)$ w przedziale (a,b)

(Wniosek 12. Funkcja dolnie półciągła w przedziale (a,b) dosięga w jego obrębie dolnego kresu.

Weźmy

$$g(x)=-f(x).$$

Jeśli funkcja $f(x)$ jest dolnie półciągłą w przedziale (a,b) wówczas na mocy tw. I funkcja $g(x)$ będzie górnie półciągłą w tymże przedziale. Lecz według ostatniego twierdzenia (VI) istnieje wtedy wartość x, spełniająca równość

$$g(x)=M,$$

gdzie M jest górnym kresem tej funkcji w przedziale (a,b).

Otóż, jak się łatwo przekonać $-M$ jest dolnym kresem funkcji $-g(x)$, ale dla powyższej wartości zmiennej x

$$f(x)=-g(x)=-M.$$

Skąd wnosimy, że funkcja dolnie półciągła $f(x)$ dosięga dolnego kresu w obrębie przedziału (a,b).

Twierdzenie odwrotne względem VI nie jest prawdziwe, natomiast udowodnić można następującą własność funkcji dosięgającej np. górnego kresu.

Twierdzenie VII Funkcja $f(x)$ dosięgająca swego górnego kresu w przedziale (a,b) przy pewnej wartości x_0 zmiennej x jest górnie półciągłą przy $x=x_0$.

Przyjmijmy, że funkcja $f(x)$ nie jest górnie półciągłą w punkcie x_0. Wówczas istnieje taka liczba dodatnia ε,

L

że wewnątrz każdego przedziału $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ mamy
$$f(x) \geq f(x_0)+\varepsilon.$$
Ponieważ funkcja $f(x)$ dosięga górnego kresu w punkcie x_0, więc
$$f(x_0)=M.$$
Mamy tedy
$$f(x) > M+\varepsilon$$
dla pewnej liczby dodatniej ε i wartości x. A więc istnieje w przedziale (a,b) wartość funkcji większa od jej górnego kresu, wbrew własności górnego kresu, że
$$f(x) \leq M$$
we wszystkich punktach przedziału (a,b)

Podobnież prawdziwym jest następujący wniosek, o czym możemy się przekonać, rozumując jak przy wniosku 12

<u>Wniosek 13.</u> <u>Funkcja dosięgająca w punkcie x_0 przedziału (a,b) swego dolnego kresu jest w tym punkcie dolnie półciągłą.</u>

Przyjrzawszy się bliżej dowodom twierdzeń <u>V</u> i <u>VI</u>, przekonywujemy się, że na krańcach przedziału wchodzi w grę półciągłość funkcji jedynie ze strony przedziału. Otóż na str. 24, gdy mowa o ~~ro~~ nierówności
$$f(x)<f(a)+\varepsilon,$$
chodzi nam tylko o to, aby była spełniona w przedziale $(a, a+\delta)$, to samo stosuje się do krańca b. W dowodzie tw. <u>VI</u> na str. 27 podany jest wprawdzie warunek
$$|x-k|<\delta,$$
gdzie
$$a \leq k \leq b,$$
lecz rozchodzi się tam wszak o istnienie przynajmniej jednej wartości, któraby spełniała nierówności (22) i (24). Otóż, o ile $k=a$, jest rzeczą oczywistą że w przedziale $(a, a+\delta)$ taka wartość istnieje, gdy zaś $k=b$, wystarczy do przedziału $(b-\delta, b)$ zastosować rozumowanie ze str. 27 odnoszące się do przedziału $(k-\delta, k+\delta)$

A więc w omawianych twierdzeniach ~~(podobnie jak i we wnioskach 9, 12)~~ konieczne są tylko następujące dane:

1) $f(x)$ jest górnie półciągłą w punkcie a ze strony prawej,

2) f(x) jest górnie półciągłą w każdym punkcie wewnętrznym przedziału (a,b),

3) f(x) jest górnie półciągłą w punkcie b ze strony lewej.

Krócej mówić będziemy, że f(x) jest górnie półciągłą w obrębie przedziału (a,b).

Wogóle przez wyrażenie: „funkcja posiada pewne własności punktowe w obrębie przedziału (a,b)" rozumieć będziemy, że posiada je w każdym punkcie wewnętrznym przedziału (a,b) zaś na krańcach przynajmniej ze strony przedziału.

Na podstawie powyższych rozważań możemy z twierdzenia V i wniosku 8 wysnuć następujący wniosek:

Wniosek 14. Funkcja górnie (dolnie) półciągła w obrębie przedziału (a,b) jest w nim ograniczoną od góry (dołu).

Podobnież z twierdzenia VI i wn. 8 otrzymujemy:

Wniosek 15. Funkcja górnie (dolnie) półciągła w obrębie przedziału (a,b) dosięga w nim swego górnego (dolnego) kresu.

Rozdział IV

O klasach funkcyj półciągłych przyjmujących każdą wartość pośrednią.

Własności poprzednio rozpatrywane nawet razem wzięte nie wystarczają do oznaczenia ciągłości funkcji. Łatwo bowiem zbudować przykład funkcji, która jest ograniczona i dosięga obu kresów w każdym przedziale a jednak nie jest ciągłą. Podobnie ma się rzecz z zasadniczą własnością funkcyj ciągłych: przybierania wewnątrz dowolnego przedziału każdej wartości pośredniej między wartościami na krańcach przedziału. Jak wiemy, istnieją funkcje nieciągłe zachowujące się w ten sposób a nawet cała klasa mianowicie klasa funkcyj pochodnych.

Otóż zajmiemy się obecnie uzyskaniem szerszych warunków wystarczających, aby funkcja przyjmowała każdą wartość pośrednią.

Twierdzenie VII. Funkcja $f(x)$ górnie półciągła ze strony prawej i dolnie półciągła ze strony lewej w obrębie przedziału (a,b) przybiera wewnątrz dowolnego przedziału (α,β), który jest częścią (a,b), każdą wartość pośrednią między $f(\alpha)$ i $f(\beta)$, o ile

$$f(\alpha)<f(\beta).$$

Weźmy pod uwagę punkt x_0 należący do (α,β), a więc i do (a,b). W punkcie tym funkcja $f(x)$ posiada dwie następujące własności, względnie jedną z nich:

1) do dowolnej byle dodatniej liczby ε można tak dobrać również dodatnią liczbę δ, aby ze związku

$$0<x-x_0<\delta$$

wynikała nierówność

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$

2) jakąkolwiek byłyby dodatnie liczby ε,δ istnieje wartość x spełniająca nierówności

$$0<x_0-x<\delta \qquad f(x)>f(x_0)-\varepsilon.$$

Otóż możemy zawsze tak dobrać δ, aby przedział $(x_0-\delta, x_0)$ był częścią (α,β), o ile naturalnie $x\neq\alpha$. A więc spełniony będzie warunek

2') jakąkolwiek byłaby dodatnia liczba ε, istnieje

w przedziale (α, β) wartość x spełniająca nierówności:

$$x < x_0 \quad , \quad f(x) > f(x_0) - \varepsilon ,$$

o ile

$$x_0 > \alpha .$$

Oznaczmy dalej przez y_1 liczbę zawartą między $f(\alpha)$ i $f(\beta)$, czyli zgodnie z założeniem niech będzie

$$f(\alpha) < y_1 < f(\beta). \quad (25).$$

Niech k oznacza kres dolny tych wartości zmiennej x w przedziale (α, β), dla których

$$f(x) \geq y_1$$

Kres k istnieje, gdyż zbiór rozważanych liczb zawiera conajmniej liczbę β i jest przytem ograniczony z dołu przez α.

Jako kres dolny k spełniać będzie następujące warunki:

3) gdy x należy do przedziału (α, β) i spełnia nierówności

$$f(x) \geq y_1 ,$$

wówczas

$$x \geq k.$$

4) jakąkolwiek byłaby dodatnia liczba δ, istnieje wartość zmiennej x, spełniająca nierówności:

$$\alpha \leq x \leq \beta \quad , \quad f(x) \geq y_1 \quad , \quad x < k + \delta .$$

Dowiedziemy zapomocą sprowadzania do niedorzeczności, że powinno być

$$f(k) = y_1 .$$

Przypuśćmy, że tak nie jest. Pozostają dwie możliwości: albo $f(k) > y_1$ albo $f(k) < y_1$.

Rozpatrzmy <u>wypadek pierwszy</u>

$$f(k) > y_1 \quad (26)$$

Oznaczając przez ε dodatnią różnicę $f(k) - y_1$, mamy

$$y_1 = f(k) - \varepsilon .$$

Warunek 3) może być wobec tego napisany jak następuje: istnieje dodatnia liczba ε taka, że w przedziale (α, β) nierówność

$$f(x) \geq f(k) - \varepsilon$$

pociąga za sobą przy wszelkich x nierówność

$$x \geq k .$$

Lecz gdy w warunku 2') połóżymy $x_0 = k$ prawdą jest, że jakąkolwiek byłaby liczba ε istnieje wartość x spełniająca

nierówności:

nierówności:

$$x < k \quad , \quad f(x) < f(k) - \varepsilon \,,$$

o ile $k > a$.

Jeśli więc okaże się, że $k > a$, wówczas otrzymujemy sprzeczność.

Otóż nie może być $k = a$, gdyż nie byśmy zgodnie z przypuszczeniem (26) oraz założeniem

$$f(\alpha) < f(\beta)$$

zależność

$$f(\alpha) > y_1 > f(\alpha).$$

Przejdźmy teraz do <u>drugiego</u> <u>wypadku</u>:

$$f(k) < y_1 . \qquad (27)$$

Biorąc ε równe dodatniej różnicy $y_1 - f(k)$, mamy

$$y_1 = f(k) + \varepsilon .$$

Wobec tego warunkowi 4) możemy nadać następującą postać:

jakąkolwiek byłaby dodatnia liczba δ istnieje również dodatnia liczba ε oraz wartość x w przedziale (α, β) takie, że:

$$f(x) \geq f(k) + \varepsilon \,, \qquad (28)$$

$$x < k + \delta . \qquad (29)$$

Ponieważ zaś zgodnie z warunkiem 3) nierówność

$$f(x) > y_1$$

pociąga za sobą $x \geq k$, więc możemy zastąpić (29) przez podwójną nierówność

$$0 \leq x - k < \delta . \qquad (30)$$

Otóż na mocy warunku 1) z nierówności tej przy δ odpowiednio dobranym do ε wynika, iż

$$f(x) < f(k) + \varepsilon . \qquad (31)$$

gdyż k podobnie jak x_0 należy do przedziału (α, β), przyczem ostatnia nierówność (31) zachodzi dla $x = k$.

Znowu doszliśmy do sprzeczności: istnieją bowiem jak widzieliśmy wartości x spełniające związki (28), (30) przy pewnym ε i to niezależnie od wartości dodatniej δ.

Z rozważań ~~powyższych~~ wynika, że nie może być ani $f(k) > y_1$ ani też $f(k) < y_1$, skąd wnosimy, iż

$$f(k)=y_1$$

czyli w punkcie k funkcja $f(x)$ przybiera wartość równą obranej liczbie y_1, przyczem punkt k leży wewnątrz przedziału (α,β)

Wniosek 16. Funkcja $f(x)$ dolnie półciągła ze strony prawej i górnie półgęsta ze strony lewej w obrębie przedziału (a,b) przyjmuje wewnątrz dowolnego przedziału (α,β), który jest częścią (a,b), każdą wartość zawartą między $f(\alpha)$ i $f(\beta)$, o ile

$$f(\alpha)>f(\beta).$$

Weźmy

$$g(x)=-f(x),$$

funkcja $g(x)$ będzie prawostronnie górnie półciągłą i dolnie półgęstą ze strony lewej. Jeśli dalej obierzemy liczbę y_1 taką, że

$$f(\alpha)>y_1>f(\beta)$$

wówczas mamy

$$g(\alpha)=-f(\alpha)<-y_1<-f(\beta)=g(\beta).$$

a więc $-y_1$ jest zawarte między wartościami funkcji $g(x)$ na krańcach przedziału (α,β). Skoro zaś na zasadzie ostatniego twierdzenia (VII) istnieje wartość ~~x~~ zmiennej x spełniająca równość

$$g(x)=-y_1,$$

to ta sama wartość czynić będzie zadość równości

$$f(x)=y_1,$$

gdyż

$$f(x)=-g(x).$$

Twierdzenie VIII Funkcja $f(x)$ górnie półciągła ze strony lewej oraz dolnie półgęsta ze strony prawej w obrębie przedziału (a,b) przybiera wewnątrz dowolnego przedziału będącego częścią (a,b) każdą wartość pośrednią między $f(\alpha)$ i $f(\beta)$, o ile

$$f(\alpha)>f(\beta).$$

Dowód podobny do dowodu twierdzenia VII, należy jednak zamiast kresu dolnego wziąć pod uwagę kres górny tych wartości zmiennej x, które czynią zadość nierówności

$$f(x)\geq y_1,$$

gdzie y_1 jest liczbą zawartą między $f(x)$ i $f(\beta)$.

Możnaby również uważać to twierdzenie za wniosek z tw VII, wystarczy w tym celu rozpatrzeć funkcję $g(x)$ określoną przez równość

$$g(x)=f(-x),$$

będzie ona spełniać warunki tw VII odnoszące się do przedziału $(-\beta,-\alpha)$.

Wniosek 17. Funkcja dolnie półciągła ze strony lewej oraz górnie półgęsta ze strony prawej w obrębie przedziału (a,b), przybiera wewnątrz dowolnego przedziału (α,β) będącego częścią (a,b) każdą wartość pośrednią między wartościami $f(\alpha)$ i $f(\beta)$, o ile

$$f(\alpha)<f(\beta).$$

Dowód podobny jak dla wniosku 15.

Gdybyśmy przy geometrycznym przedstawieniu funkcji $f(x)$ przeprowadzili osie równoległe do osi współrzędnych przez punkt $\{x_0, f(x_0)\}$, wówczas okazałoby się, że warunki wymagane w twierdzeniach i wnioskach tego rozdziału odnoszą się do pierwszej i trzeciej ćwiartki przy założeniu

$$f(\alpha)<f(\beta),$$

zaś do drugiej i czwartej przy założeniu

$$f(\alpha)>f(\beta),$$

jednym słowem do tych ćwiartek, w których znajdowałaby się krzywa w sąsiedztwie punktu $\{x_0, f(x_0)\}$, o ileby przedstawiała funkcję monotoniczną: stale wzrastającą w pierwszym wypadku, stale malejącą w drugim.

Ułóżmy tablicę warunków przy których funkcja $f(x)$ przybiera wewnątrz przedziału (α,β) wartości pośrednie między $f(\alpha)$ i $f(\beta)$.

	półciągłość		półgęstość w otocz. x_0		Stosunek krańcowych wartości
Tw. VII	górna	prawa	dolna	lewa	$f(\alpha)<f(\beta)$
" VIII	górna	lewa	dolna	prawa	$f(\alpha)>f(\beta)$
Wn. 16	dolna	prawa	górna	lewa	$f(\alpha)>f(\beta)$
" 17	dolna	lewa	górna	prawa	$f(\alpha)<f(\beta)$

Jeśli funkcja jest górnie półciągłą w punkcie x_0, jest nią zarówno z prawej jak i z lewej strony.

Skoro bowiem zachodzi jedna z zależności:

$$0 < x - x_0 < \delta \qquad 0 < x_0 - x < \delta \qquad (32)$$

zachodzi również nierówność

$$|x - x_0| < \delta.$$

Ponieważ zaś ta ostatnia pociąga za sobą na zasadzie określenia funkcji górnie półciągłej nierówność

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

więc również sprawiają to zależności (32).

Na zasadzie powyższego możemy zatem orzec, iż funkcja górnie półciągła oraz dolnie półgęsta z obu stron w przedziale (a,b) przyjmuje wewnątrz dowolnego przedziału (α,β) wartości pośrednie między $f(\alpha)$ i $f(\beta)$ zarówno przy

$$f(\alpha) < f(\beta)$$

jak i przy

$$f(\alpha) > f(\beta).$$

Wniosek 18. Funkcja $f(x)$ górnie (dolnie) półciągła oraz dolnie (górnie) półgęsta z obu stron w obrębie przedziału (a,b) przybiera wewnątrz przedziału (α,β) będącego częścią (a,b) każdą wartość pośrednią między wartościami krańcowymi $f(\alpha)$ i $f(\beta)$.

Otóż funkcja dokładnie górnie (dolnie) półciągła spełnia warunki tego wniosku, o ile jest dokładnie półciągłą z obu stron t.j. gdy

$$\overline{f(x-0)} = f(x) = \overline{f(x+0)}$$

w każdym punkcie przedziału (a,b).

Wniosek 19. Funkcja $f(x)$ dokładnie półciągła z obu stron w obrębie przedziału (a,b) przybiera wewnątrz przedziału (α,β), który jest częścią (a,b), każdą wartość pośrednią między $f(\alpha)$ i $f(\beta)$.

Przykład 5. Określmy funkcję $f(x)$ w przedziale $(0,1)$ w sposób następujący:

$$f(x) = x \text{ , gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną lub całkowitą,}$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} + \frac{1}{q} \text{ , gdzie } \frac{p}{q} \text{ jest ułamkiem właściwym, nieprzywiedlnym.}$$

Okażemy, że $f(x)$ jest f. górnie półciągłą w przedz. $(0,1)$. Jeżeli rozpatrzymy przedewszystkiem zachowanie się funkcji w sąsiedztwie wymiernego punktu $x_0 = \frac{p_0}{q_0}$. Należy znaleźć takie otoczenie tego punktu, aby było

$$f(x) < f(x_0)+\varepsilon. \qquad (33)$$

Gdy x jest liczbą wymierną $\frac{p}{q}$, podzielmy przedział $(0,1)$ na tyle części ile wynosi najmniejsza wspólna wielokrotna liczb nie większych od q_0, oznaczmy tą wielokrotną przez W. Wartości wymierne x zawarte wewnątrz każdego z tych cząstkowych przedziałów będą miały wówczas mianowniki większe od q_0

$$q > q_0.$$

Każdy z otrzymanych przedziałów cząstkowych a w szczególności oba przedziały których kraniec znajdują się w punkcie $\frac{p_0}{q_0}$ podzielmy na $2n$ równych części tak, aby zachodziła nierówność

$$\frac{1}{nW} < \varepsilon.$$

Górnym kresem przedziału $\left(\frac{p_0}{q_0}-\frac{1}{2nW}, \frac{p_0}{q_0}+\frac{1}{2nW}\right)$ jest $\frac{p_0}{q_0}+\frac{1}{nW}$, a więc liczba mniejsza od $\frac{p_0}{q_0}+\varepsilon$.

Nierówność (33) będzie zatym zachodziła pod warunkiem

$$\left|x-\frac{p_0}{q_0}\right| < \frac{1}{2nW}. \qquad (34)$$

Gdy x jest liczbą niewymierną, wówczas nierówność (33) przybiera postać

$$x < \frac{p_0}{q_0}+\frac{1}{q_0}+\varepsilon. \qquad (35)$$

Weźmy liczbę ułamkową $\frac{r}{q_0}$, tak wybierając r, aby było

$$\frac{r}{q_0} < \varepsilon.$$

Wtedy nierówność nasza będzie spełniona, o ile

$$x-\frac{p_0}{q_0} < \frac{1+r}{q_0}. \qquad (36)$$

Przechodząc dalej do wypadku, gdy x_0 jest liczbą niewymierną lub całkowitą, możemy znowu zastosować sposób rozumowania, który doprowadził nas do warunku (35).

Niech m będzie tak wielką liczbą, aby było

$$\frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Podzielmy przedział $(0,1)$ na $2m$ części; wewnątrz każdej z nich wartość x, o ile jest liczbą ułamkową wymierną, posiadać będzie mianownik większy od $2m$

$$q > 2m,$$

skąd

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{2m}.$$

Kres górny funkcji funkcji $f(x)$ w przedziale $\left(x_0-\frac{1}{2m}, x_0+\frac{1}{2m}\right)$ będzie $x_0+\frac{1}{n}$, czyli liczba mniejsza od $f(x_0)+\varepsilon$.

Warunkiem nierówności (33) jest więc $|x-x_0| < \frac{1}{2m}$. (37)

Wreszcie, gdy obie liczby x_0, x są niewymiernymi nierówność (33) staje się warunkiem

$$x - x_0 < \varepsilon . \qquad (38)$$

Zbierając te wyniki, widzimy, że, gdy δ jest liczbą dodatnią nie większą od żadnej z liczb $\frac{1}{2nN}, \frac{1+r}{q_0}, \frac{1}{2n}, \varepsilon$, wówczas nierówność

$$|x - x_0| < \delta$$

pociąga za sobą (33)

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon .$$

Pozostaje dowieść, że funkcja wyżej określona jest dolnie półciągłą z obu stron w otoczeniu każdego punktu wewnątrz (0,1).

Niech x_0 będzie wymierną liczbą $\frac{p_0}{q_0}$. Należy znaleźć dwie wartości: jedną większą drugą mniejszą od $\frac{p_0}{q_0}$, któreby spełniały warunki:

$$f(x) - f(x_0) > -\varepsilon , \qquad (39)$$

$$|x - x_0| < \delta .$$

Weźmy wartość wymierną x, mianowicie ułamek nieprzywiedlny o mianowniku q_0

$$x = \frac{p}{q_0} \text{ . gdzie } p < q_0$$

Powinna zachodzić nierówność (39)

$$\frac{p}{q_0} + \frac{1}{q_0} - \left(\frac{p_0}{q_0} + \frac{1}{q_0}\right) > -\varepsilon$$

czyli

$$\frac{p}{q_0} - \frac{p_0}{q_0} > -\varepsilon .$$

Gdy chcemy, aby zachodził przyjęty ~~prawa~~ warunek

$$0 < x - x_0 < \delta$$

wystarczy wybrać p tak, aby było

$$p_0 < p < p_0 + \delta q_0 .$$

Jeśli natomiast chcemy, aby spełniony był warunek

$$0 > x - x_0 > -\delta ,$$

trzebą wziąć p mniejsze od p_0 i ~~mniejsze~~ większe od każdej z liczb $p_0 - \varepsilon q_0, p_0 - \delta q_0$.

Wreszcie, gdyby x_0 było liczbą niewymierną lub całkowitą nierówność (39) sprowadziłaby się do warunku $x - x_0 > -\varepsilon$, gdybyśmy wzięli niewymierne x.

W tym więc wypadku odszukanie odpowiednich x nie przedstawia trudności.

O naszej funkcji możemy zatem powiedzieć, że przyjmuje każdą wartość pośrednią między dwoma liczbami dodatnimi mniejszymi od jedności.

Opierając się na wnioskach (str 30) 15 i 19 (str 36) oraz na zasadniczych własnościach kresów, możemy wygłosić

Wniosek 20. Jeśli m jest dolnym kresem, zaś M górnym kresem funkcji $f(x)$ w przedziale (α,β) dokładnie górnie półciągłej z obu stron w obrębie tego przedziału (a,b), wówczas funkcja $f(x)$ przyjmuje w przedziale (α,β) będącego częścią (a,b) każdą wartość y spełniającą warunek

$$m < y \leq M.$$

Podobny wniosek odnosi się do funkcji d. dolnie półciągłej wysłowimy nieco inaczej:

Wniosek 21. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest dokładnie dolnie półciągła z obu stron w obrębie przedziału (a,b) zaś M, m są kresami górnym i dolnym tej funkcji w przedziale (α,β), który jest częścią (a,b), wówczas istnieje wartość x spełniająca warunki:

$$\alpha \leq x \leq \beta,$$
$$f(x) = y,$$

gdzie

$$m \leq y < M.$$

Pozostaje rozstrzygnąć pytanie, czy dwie klasy funkcji półciągłych wymienione czy to we wniosku 18 lub 19 na str. 36 są jedynymi klasami funkcji półciągłych w obrębie prz. (a,b) a przyjmujących każdą wartość pośrednią.

W tym celu udowodnimy

Twierdzenie IX. Funkcja $f(x)$, która przyjmuje w dowolnym przedziale (α,β) będącym częścią (a,b) każdą wartość między $f(\alpha)$ i $f(\beta)$ jest dolnie półciągła z obu stron w obrębie przedziału (a,b).

Niech x_0 będzie punktem wewnętrznym przedziału (a,b). Gdy dane są liczby dodatnie ε i δ, obieramy liczbę dodatnią δ' tak, aby zachodziły związki:

$$\delta' < \delta, \quad x_0 - \delta' \geq a, \quad x_0 + \delta' \leq b.$$

Przedział $(x_0-\delta', x_0+\delta')$ będzie tedy częścią (a,b) podobnie przedziały $(x_0-\delta', x_0)$, $(x_0, x_0+\delta')$. Oznaczmy przez $M_{-\delta'}$ kres górny zaś przez $m_{-\delta'}$ kres dolny funkcji $f(x)$ w przedziale $(x_0-\delta', x_0)$.

Otóż, gdy

$$M_{\delta'} \neq m_{\delta'},$$

istnieją liczby większe od $f(x_0)-\varepsilon$ i zawarte między $m_{-\delta'}$ i $M_{-\delta'}$

bowiem

$$m_{\delta'} \leq f(x_0) \leq M_{\delta'}.$$

Skoro przedział $(x_0-\delta', x_0)$ jest częścią (a,b) istnieje wewnątrz niego takie punkty, w których funkcja przybiera wartości pośrednie między $m_{\delta'}$, $M_{\delta'}$, w szczególności zaś taki punkt x dla którego

$$M_{\delta'} > f(x) > f(x_0)-\varepsilon$$

A więc i w przedziale $(x_0-\delta, x_0)$ obejmującym $(x_0-\delta', x_0)$ istnieje wartość spełniająca nierówność

$$f(x) > f(x_0)-\varepsilon. \qquad (40)$$

Gdy

$$M_{\delta'} = m_{\delta'},$$

wówczas w całym przedziale $(x_0-\delta', x_0)$ mamy

$$f(x)=f(x_0),$$

a więc warunek (40) jest spełniony dla pewnej wartości różnej od x_0.

Widzimy zatem, że funkcja $f(x)$ jest dolnie półciągłą ze strony lewej punktu x_0, którym może być również punkt b.

Podobne rozumowanie przekonywuje nas, że $f(x)$ jest również półciągłą ze strony prawej w każdym punkcie wewnętrznym i na krańcu a.

Zestawiając dowiedzione twierdzenie z wnioskiem 18 na str. 36, otrzymujemy:

Wniosek 22. Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby funkcja górnie półciągła w obrębie przedziału (a,b) przybierała wewnątrz dowolnej jego części (α,β) każdą wartość pośrednią między $f(\alpha)$ i $f(\beta)$, jest, żeby była dolnie półciągłą z obu stron w obrębie przedziału α,β

Rozpatrując funkcję $g(x)$ równą $-f(x)$, można orzec na zasadzie twierdzenia IX, iż warunkiem koniecznym, aby funkcja przybierała każdą wartość pośrednią jest również jej półciągłość górna z każdej strony, skąd otrzymujemy wniosek analogiczny do 22 a odnoszący się do funkcji dolnie półciągłej w obrębie przedziału (a,b).

Istnieją zatem dwie tylko klasy funkcji półciągłych przyjmujących każdą wartość pośrednią, tworzą je funkcje górnie i dolnie dokładnie półciągłe.

Stefan Jan Kempisty